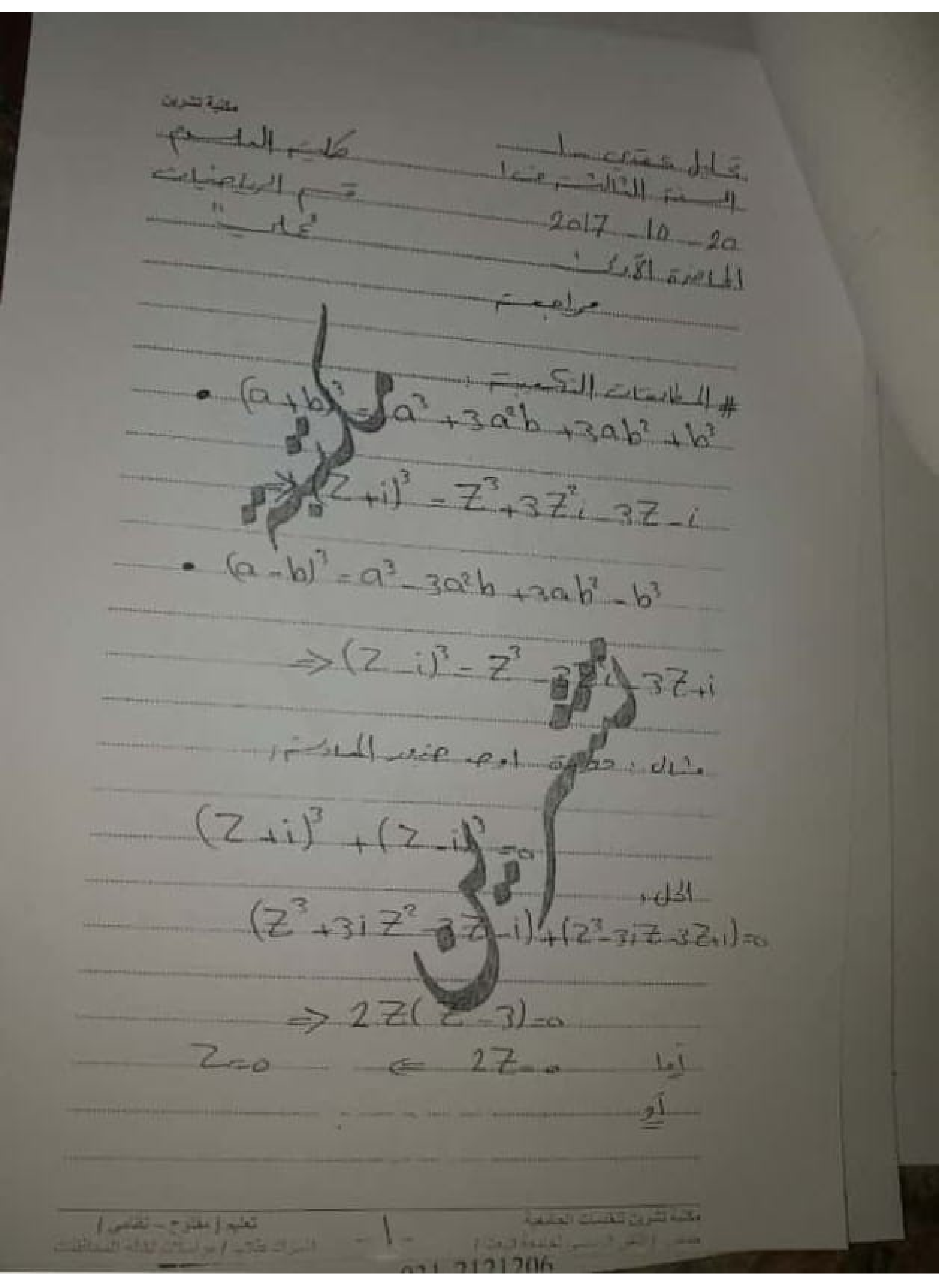


كلية العلوم — تحليل عقدي
قسم الرياضيات — السنة الثالثة عملي
عملي — 2017 - 10 - 20

المحاضرة الأولى

مراجعة

المطابقات التكعيبية:

• $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\Rightarrow (z+i)^3 = z^3 + 3z^2 i - 3z - i$

• $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\Rightarrow (z-i)^3 = z^3 - 3z^2 i - 3z + i$

مثال: حل في ℂ المعادلة:

$(z+i)^3 + (z-i)^3 = 0$

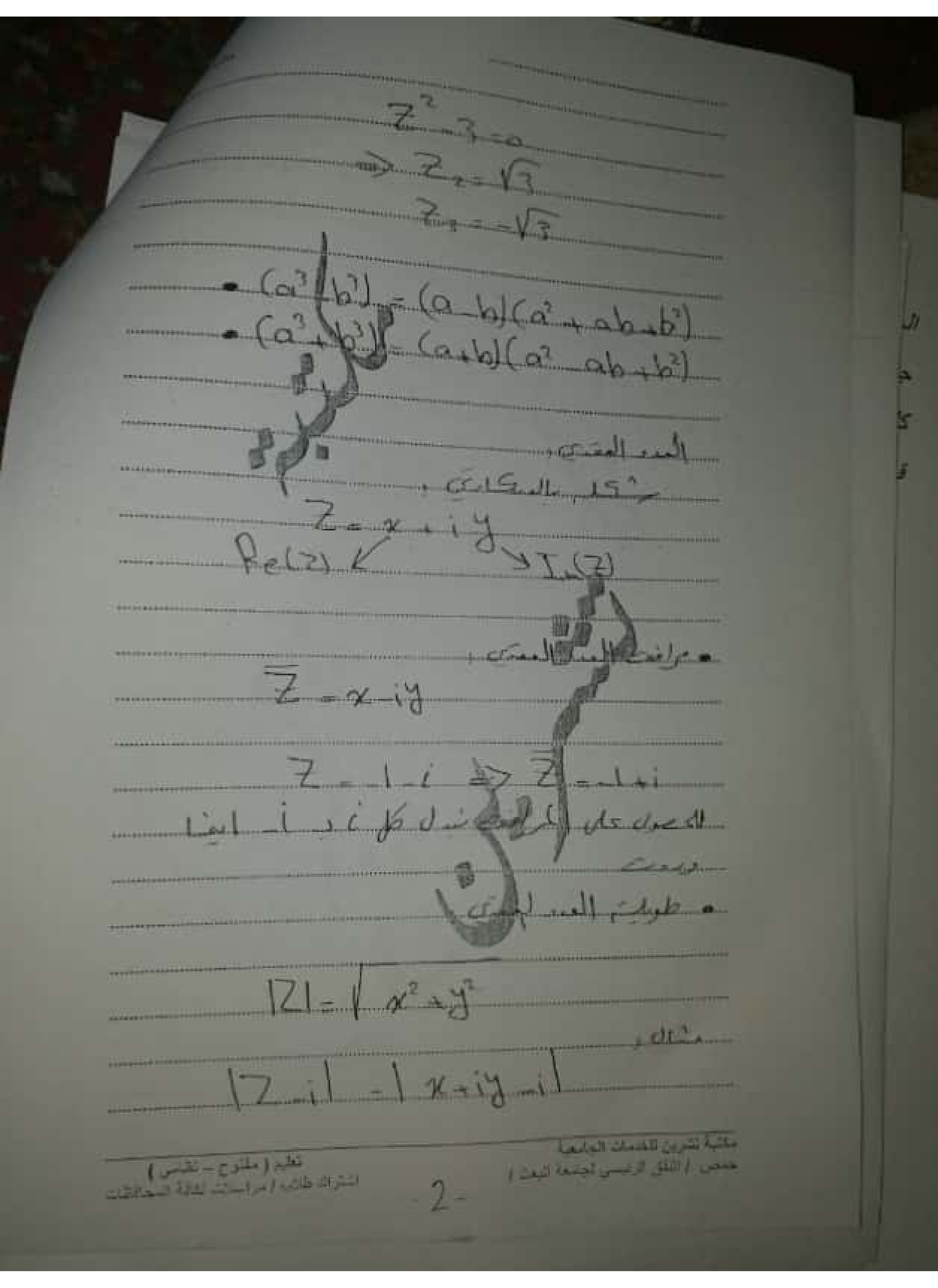
الحل:

$(z^3 + 3iz^2 - 3z - i) + (z^3 - 3iz^2 - 3z + i) = 0$

$\Rightarrow 2z(z-3) = 0$

إما $2z = 0 \Leftarrow z = 0$

أو



$z^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{3}$

$z_2 = -\sqrt{3}$

- $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

العدد المعقد:

شكل بالمكان:

$Z = x + iy$

$Re(Z) \swarrow$ $\searrow Im(Z)$

- مرافق العدد المعقد:

$\bar{Z} = x - iy$

$Z = 1 - i \Rightarrow \bar{Z} = 1 + i$

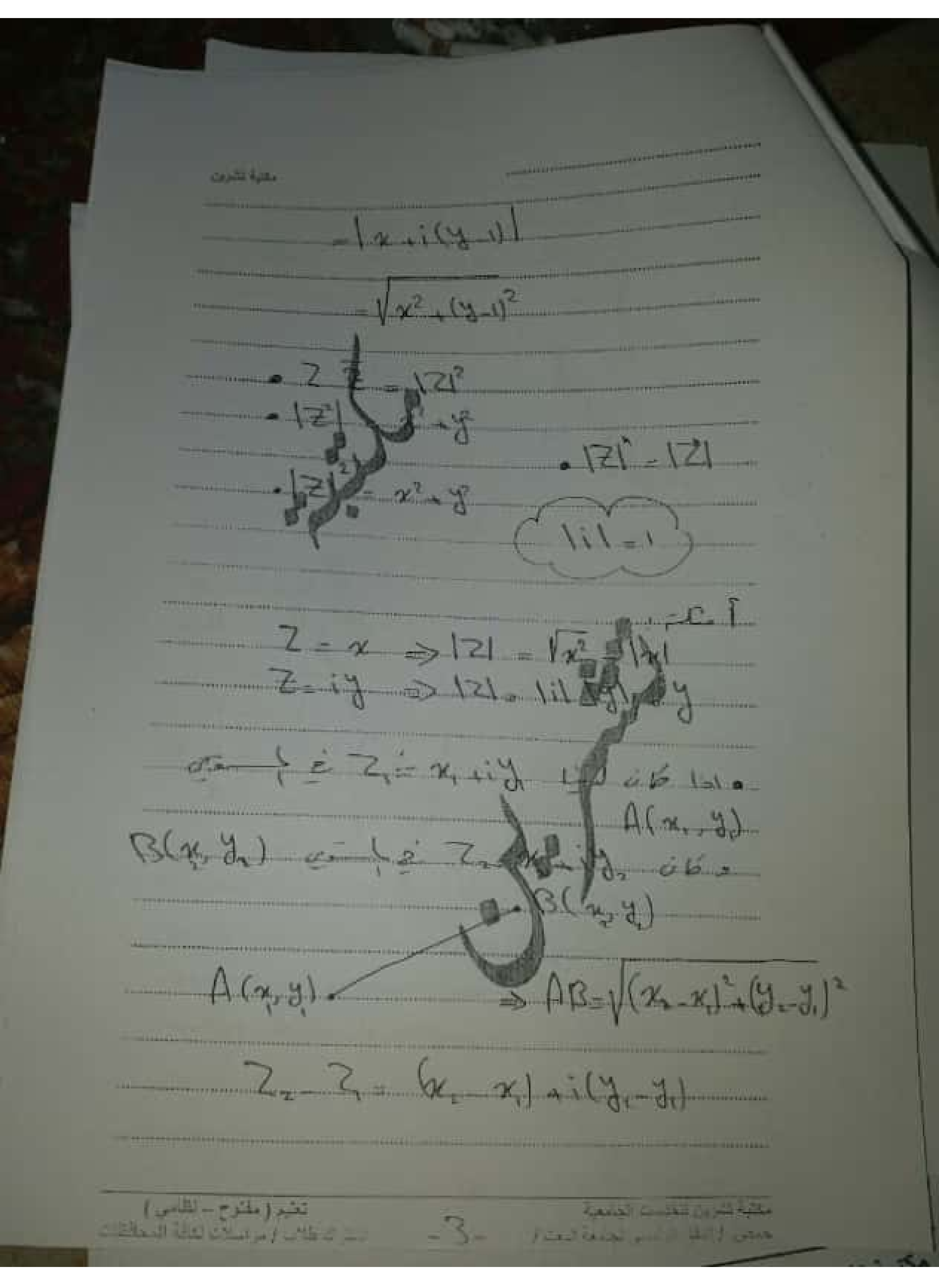
الحصول على المرافق نبدل إشارة i فقط

- طويلة العدد المعقد:

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال:

$|Z - i| = |x + iy - i|$



$= |x + i(y-1)|$

$= \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

- $Z\bar{Z} = |Z|^2$
- $|Z|^2 = x^2 + y^2$
- $|Z|^2 = x^2 + y^2$
- $|\bar{Z}| = |Z|$

$|i| = 1$

[illegible]

$Z = x \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2} = |x|$

$Z = iy \Rightarrow |Z| = |i||y| = |y|$

- اذا كان [illegible] $Z_1 = x_1 + iy_1$ [illegible] $A(x_1, y_1)$

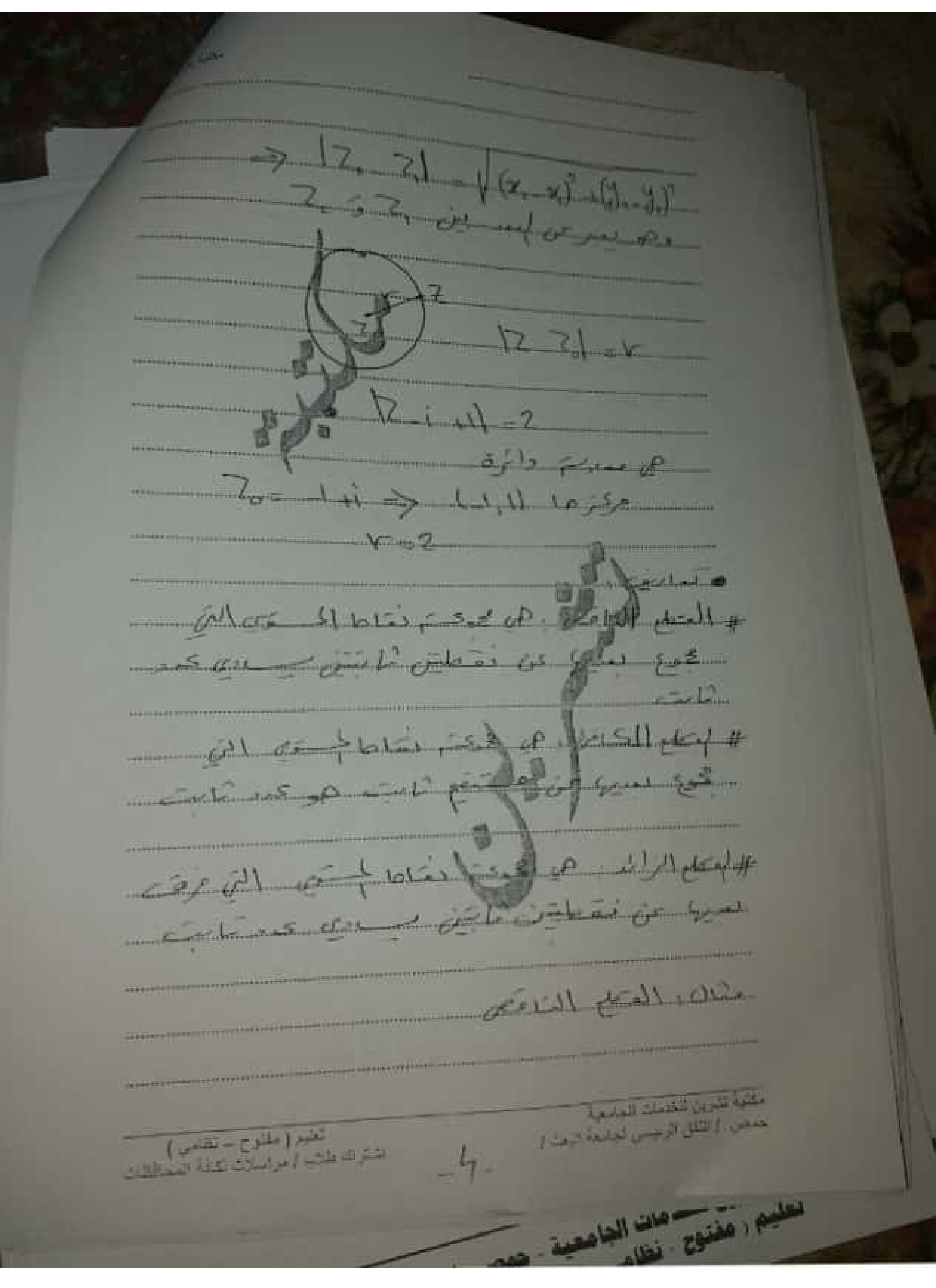
و كان $Z_2 = x_2 + iy_2$ [illegible] $B(x_2, y_2)$

$B(x_2, y_2)$

$A(x_1, y_1)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$Z_2 - Z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$



$\Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

وهو يعبر عن البعد بين z_1 و z_2

$|z - z_0| = r$

$|z - i + 1| = 2$

هي معادلة دائرة

مركزها $(-1, 1) \Rightarrow z_0 = -1 + i$

$r = 2$

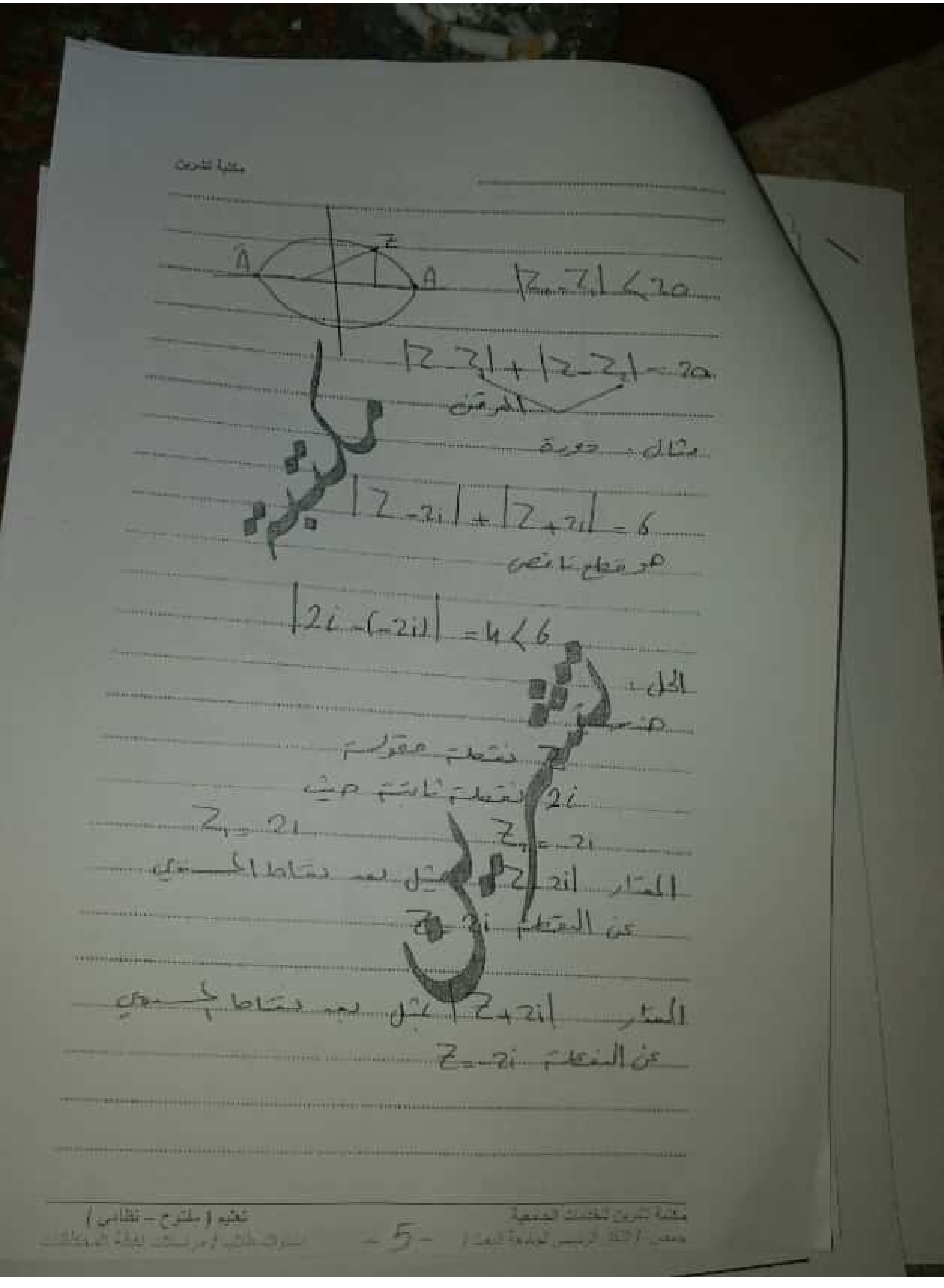
• تعاريف:

القطع الناقص: هو مجموعة نقاط المستوي التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي عدد ثابت

القطع المكافئ: هو مجموعة نقاط المستوي التي مجموع بعديها عن مستقيم ثابت هو عدد ثابت

القطع الزائد: هي مجموعة نقاط المستوي التي فرق بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي عدد ثابت

مثال: القطع الناقص



$|Z_1 - Z_2| < 2a$

$|Z - Z_1| + |Z - Z_2| = 2a$

البؤرتين

مثال : حدد هوية

$|Z - 2i| + |Z + 2i| = 6$

هو قطع ناقص

$|2i - (-2i)| = 4 < 6$

الحل :

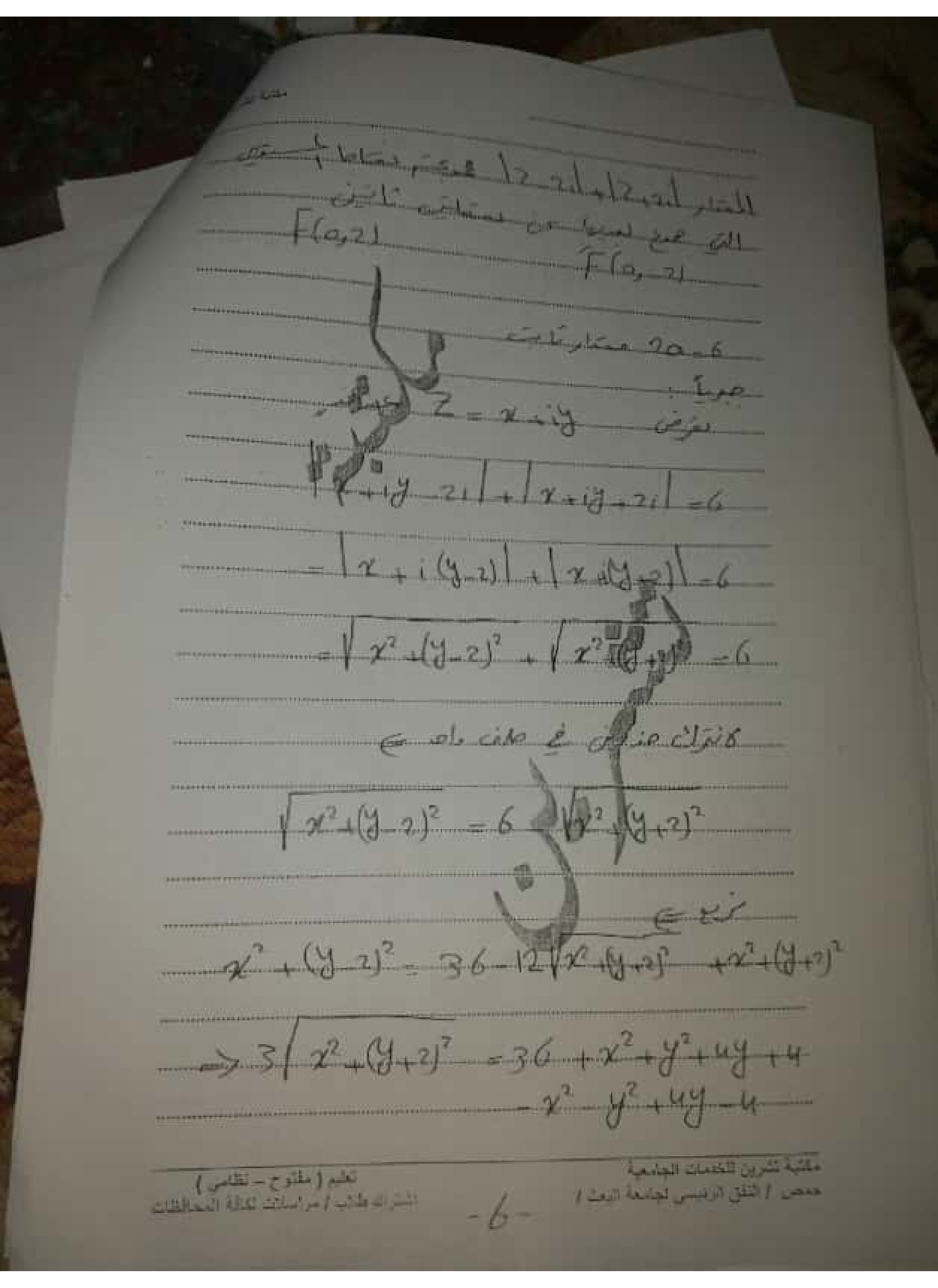
Z نقطة متغيرة

2i نقطة ثابتة حيث

$Z = 2i$ $\quad$ $Z = -2i$

المقدار $|Z - 2i|$ يمثل بعد نقاط المستوى عن النقطة $Z = 2i$

المقدار $|Z + 2i|$ يمثل بعد نقاط المستوى عن النقطة $Z = -2i$



المحل $|z-2i|+|z+2i| = 6$ هو مجموعة نقاط المستوي

التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين $F(0,2)$

$F'(0,-2)$

مقدار ثابت $2a=6$

جبرياً:

نفرض $z = x+iy$

$|x+iy-2i|+|x+iy+2i| = 6$

$= |x+i(y-2)|+|x+i(y+2)| = 6$

$= \sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2} = 6$

لا نترك جذرين في طرف واحد

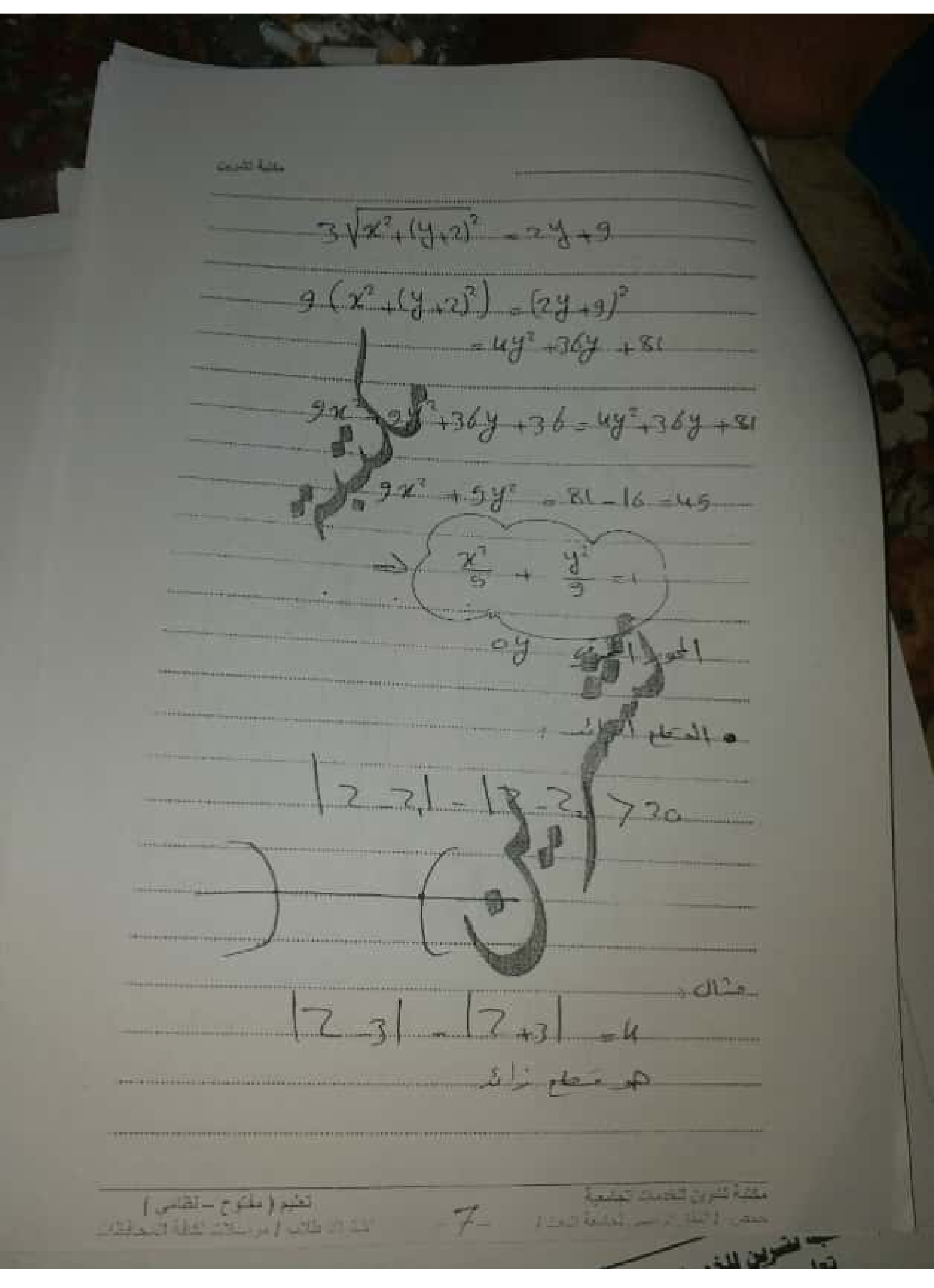
$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = 6-\sqrt{x^2+(y+2)^2}$

نربع

$x^2+(y-2)^2 = 36-12\sqrt{x^2+(y+2)^2}+x^2+(y+2)^2$

$\Rightarrow 3\sqrt{x^2+(y+2)^2} = 36+x^2+y^2+4y+4$

$-x^2-y^2+4y-4$



$3\sqrt{x^2+(y+2)^2}=2y+9$

$9(x^2+(y+2)^2)=(2y+9)^2$

$=4y^2+36y+81$

$9x^2+9y^2+36y+36=4y^2+36y+81$

$9x^2+5y^2=81-16=45$

$\Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

oy المحور الصادي

• القطع الزائد :

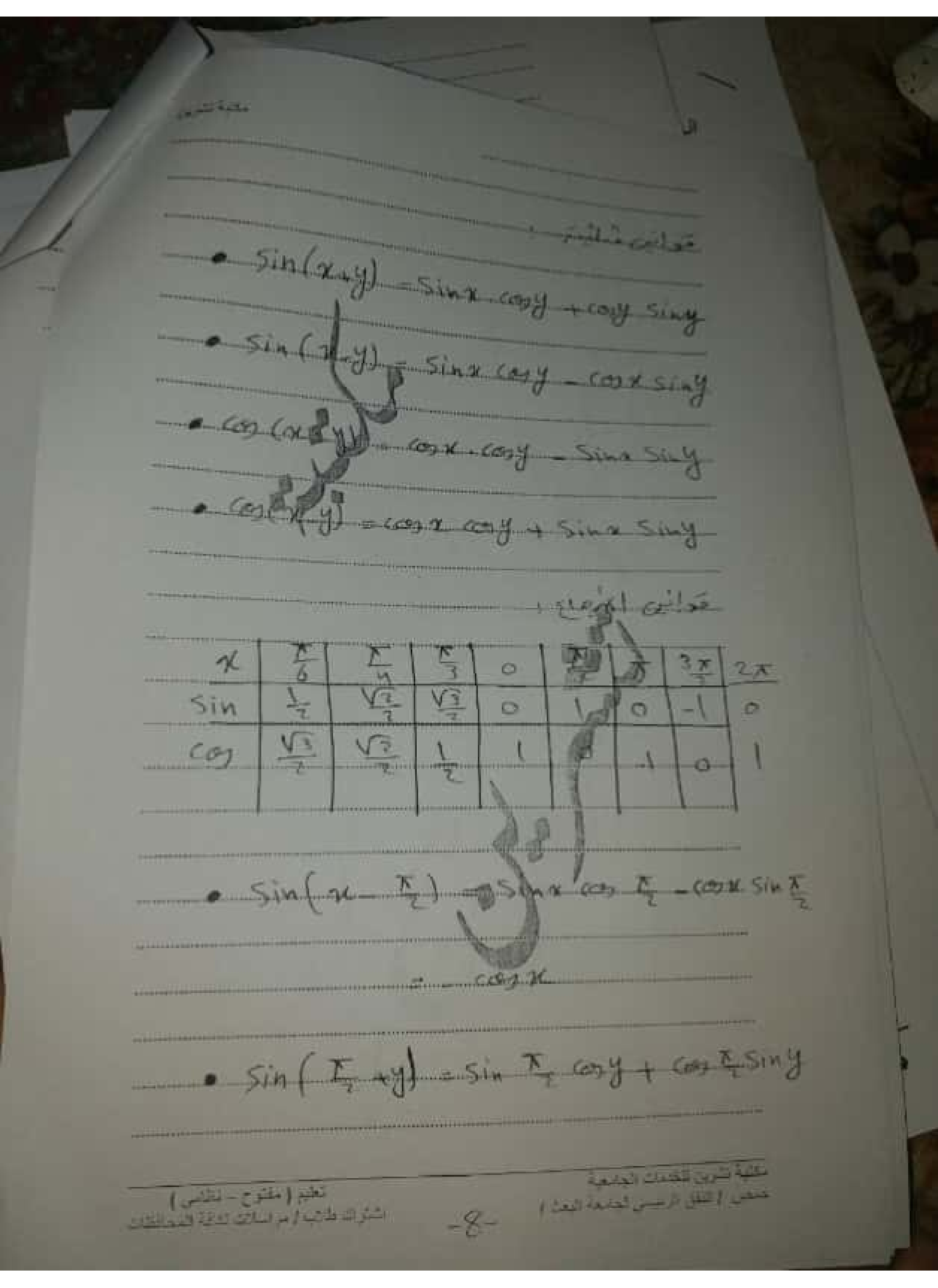
$|z-3|-|z-2|>30$

مثال :

$|z-3|-|z+3|=4$

هو قطع زائد

Scanned by CamScanner



قوانين مثلثية :

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos y \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

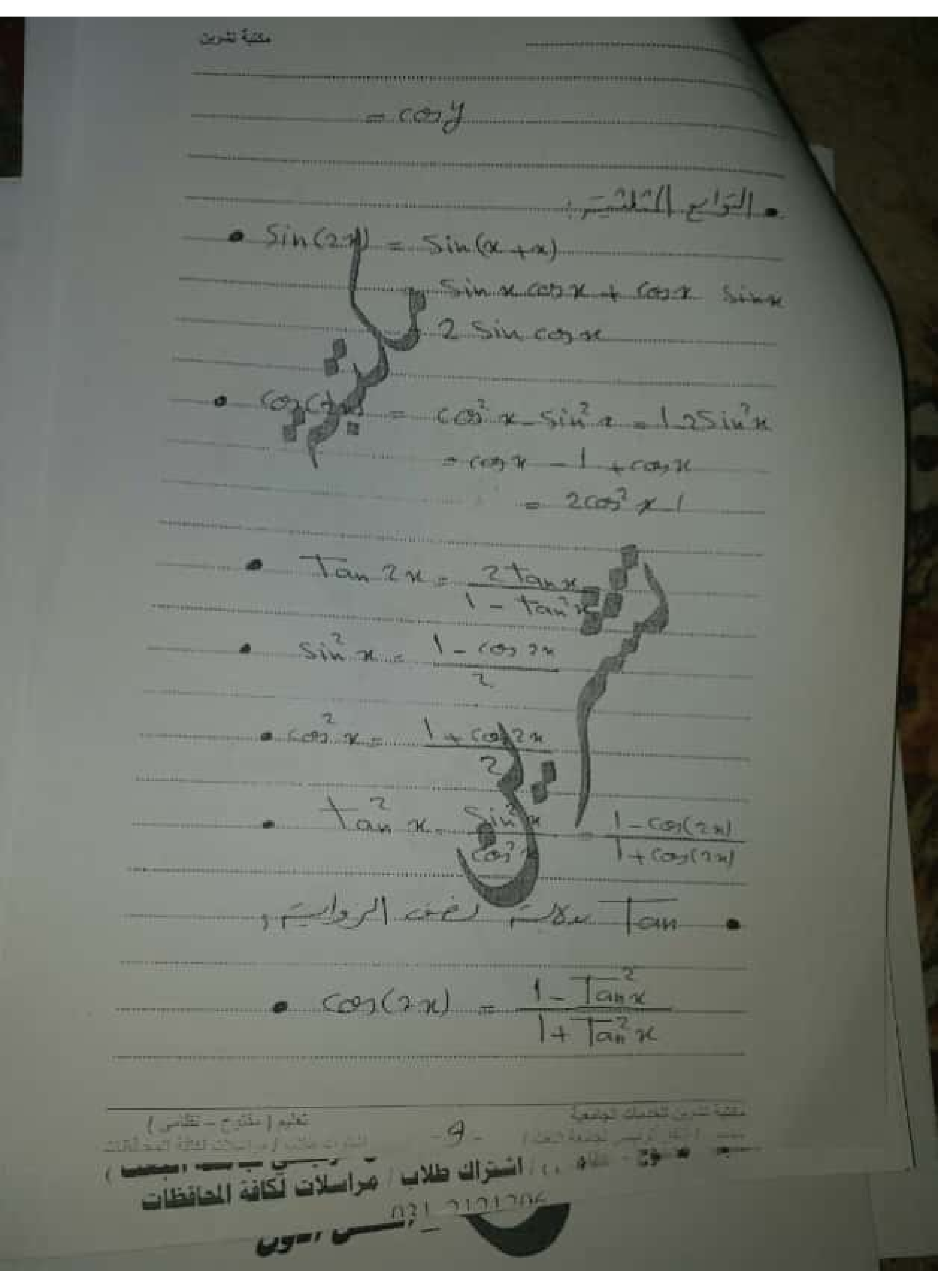
قوانين الزوايا :

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	-1	0
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	[illegible]	-1	0	1

- $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2}$

$= -\cos x$

- $\sin(\frac{\pi}{2} + y) = \sin \frac{\pi}{2} \cos y + \cos \frac{\pi}{2} \sin y$



$= \cos y$

• التوابع المثلثية:

• $\sin(2x) = \sin(x+x)$
$= \sin x \cos x + \cos x \sin x$
$= 2 \sin \cos x$

• $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
$= \cos x - 1 + \cos x$
$= 2\cos^2 x - 1$

• $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

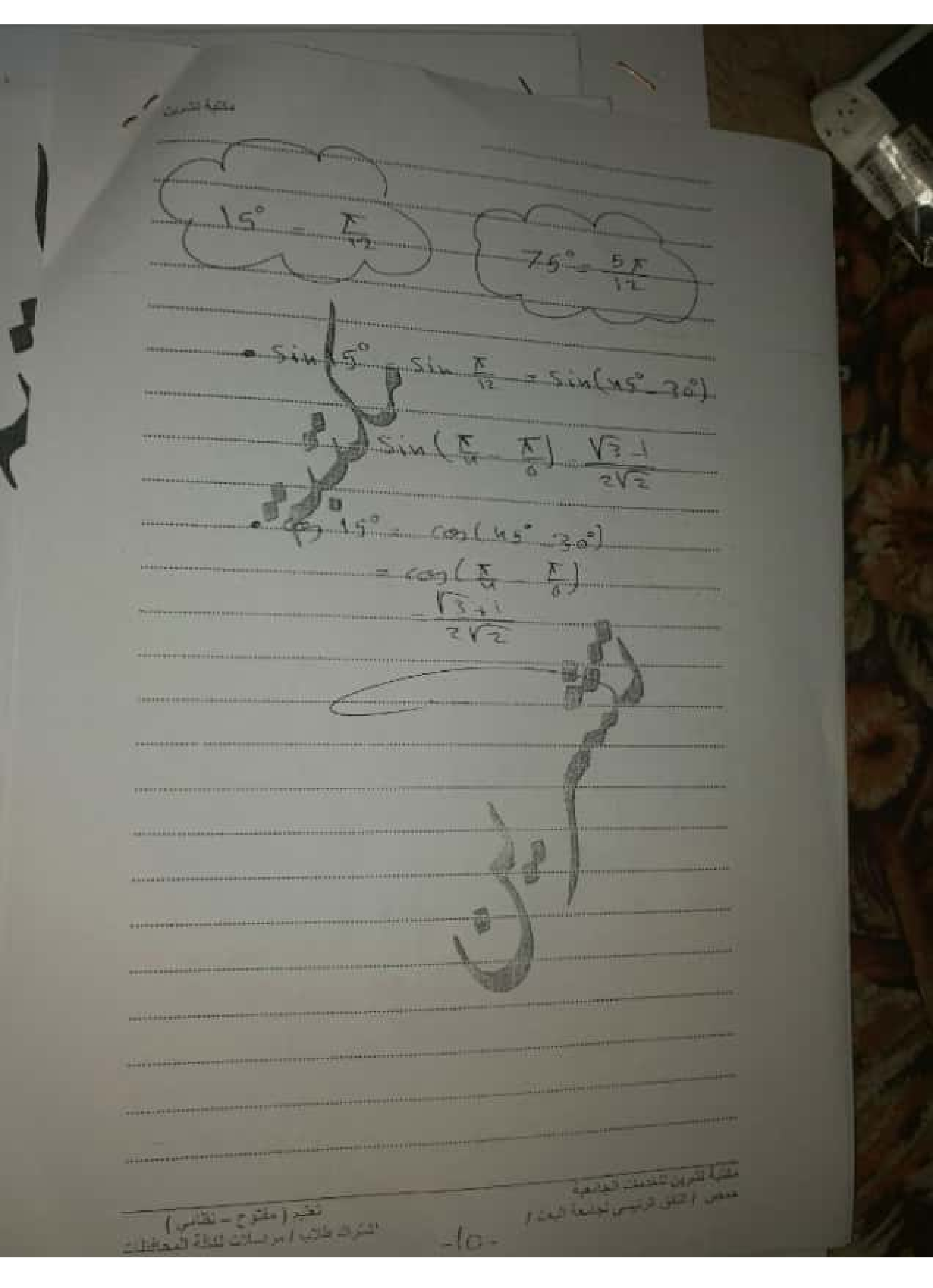
• $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

• $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

• $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$

• Tan بدلالة نصف الزوايا:

• $\cos(2x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$



$15° = \frac{\pi}{12}$
$75° = \frac{5\pi}{12}$
• $\sin 15° = \sin\frac{\pi}{12} = \sin(45° - 30°)$
$= \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
• $\cos 15° = \cos(45° - 30°)$
$= \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$
$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
-10-